www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

# EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

DUREE 2H30

Les calculatrices programmables alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86.228 du 28/07/86 (mais elles sont inutiles).

**Préambule** : *La méthode des directions conjuguées que nous nous proposons d'étudier ici permet de résoudre des systèmes d'équations linéaires à matrice symétrique définie positive. Cette méthode repose sur l' équivalence entre la résolution d'un tel système et la minimisation d'une fonction de n variables.*

**Notations**

Tous les vecteurs considérés sont dans l'espace $\mathbb{R}^n$

On note $x = (x_i)$ un tel vecteur. C'est un vecteur colonne à n composantes $x_i$ (i=1,2,...n)

Pour $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ désigne leur produit scalaire euclidien.

Dans toute la suite, on notera $x^k$ le k-ième élément d'une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, par opposition à $x_i$, qui désigne la i-ième composante d'un vecteur x.

On se donne, pour toute la suite du problème, une matrice A (n, n) symétrique associée à une forme quadratique définie positive, et un vecteur b de $\mathbb{R}^n$. On note $x^*$ la solution unique du système d'équations linéaires : (S) $A x^* = b$

Dans le but de résoudre ce système, on introduit la fonction suivante, notée J, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ :

$$J(x) = \langle Ax , x \rangle - 2\langle x , b \rangle$$

On notera par ailleurs $((x , y)) = \langle Ax , y \rangle = \langle x , Ay \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A, et $|||x||| = \langle Ax , x \rangle^{1/2}$ la norme associée.

Deux vecteurs non nuls x et y de $\mathbb{R}^n$ seront dits **A-conjugués** si $\langle Ax , y \rangle = 0$, c'est-à-dire s'ils sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ **au sens du produit scalaire** $((\ ,\ ))$.

## Première partie : Equivalence entre la résolution de (S) et la minimisation de J.

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$ on a : $|||x-x^*|||^2 = J(x) + \langle Ax^* , x^* \rangle$

2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^n$ différent de $x^*$ on a: $-\langle b , x^* \rangle = J(x^*) < J(x)$

et en déduire que J(x) atteint en $x^*$ un minimum unique. Conclure sur l'équivalence entre la résolution de (S) et la minimisation de J(x) dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce qui suit, on va calculer la solution $x^*$ de (S) en minimisant J(x).

## Seconde partie : Propriétés d' une famille de vecteurs A-conjugués.

Soient $d^1, d^2, ..., d^k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$ deux à deux A-conjugués : $\langle Ad^i , d^j \rangle = 0$ ( i,j = 1, 2, ...k ; (i≠j) )

Vect $(d^1, d^2, ..., d^k)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les $d^i$.

3) Montrer que la famille $\{d^i\}_{i=1, 2, ...,k}$ est linéairement indépendante, et en déduire que : $k \leq n$

Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On note $P^k(u)$ la projection orthogonale de u sur Vect $(d^1, d^2, ..., d^k)$ **au sens du produit scalaire** $((\ ,\ ))$, c'est-à-dire que l'on a la relation suivante :

$$\langle u - P^k(u) , Ad^i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, ..., k)$$

4) Expliciter les coefficients $\alpha_i$ tels que $P^k(u) = \alpha_1 d^1 + \alpha_2 d^2 + ... + \alpha_k d^k$

On supposera que l'on dispose dorénavant de n vecteurs deux à deux A-conjugués, notés $d^1, d^2, ..., d^n$.

5) Exprimer la solution $x^*$ de (S) dans la base $\{d^i\}_{i=1, 2, ..., n}$ de $\mathbb{R}^n$.

**Tournez la page S.V.P.**

**Troisième partie : Construction de la méthode et convergence.**

Partant d'un vecteur $x^1$ quelconque de $\mathbb{R}^n$, on cherche à minimiser J(x) en construisant une suite $\{x^k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k d^k \quad \text{(où } \lambda_k \text{ est un paramètre réel à déterminer)}$$

et telle que $J(x^{k+1})$ représente le minimum de J(x) sur tous les x de $\mathbb{R}^n$ de la forme : $x = x^k - \lambda d^k$ ($\lambda$ réel)

On posera $g^k = A\,x^k - b$

6) Expliciter alors J(x) comme un trinôme en $\lambda$ et donner l'expression du $\lambda_k$ qui réalise ce minimum. Expliciter alors la récurrence obtenue sur $g^k$.

7) Vérifier que $x^{k+1} - x^1 \in \text{Vect}(d^1, d^2, ..., d^k)$ et démontrer que : $x^{k+1} - x^1 = P^k(x^* - x^1)$.

8) En déduire la convergence globale de la méthode en au plus n itérations, c'est-à-dire que quel que soit $x^1$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $x^{n+1} = x^*$.
Que se passe-t-il si $(x^* - x^1) \in \text{Vect}(d^1, d^2, ..., d^k)$ pour $k<n$ ?

9) Montrer qu'à partir d'un même vecteur initial $x^1$, on atteint le même vecteur $x^{k+1}$ en k itérations selon les directions $d^1, d^2, ..., d^k$ **prises dans un ordre quelconque.**

10) Montrer que $< g^{k+1}, d^k > = 0$ et en déduire que $< g^{k+1}, d^i > = 0$ (i= 1, 2, ..., k)

11) Montrer que pour y pris dans le sous-espace affine :

$$x^1 + \text{Vect}(d^1, d^2, ..., d^k)$$

on a : $< y - x^{k+1}, g^{k+1} > = 0$.

12) Montrer que pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$J(y) = J(x) + < y - x, 2(Ax - b) > + < y - x, A(y - x) >$$

13) Déduire de 11) et 12) que $x^{k+1}$ réalise l'unique minimum de J(x) dans le sous-espace affine $x^1 + \text{Vect}(d^1, d^2, ..., d^k)$.

14) Retrouver ainsi la convergence de l'algorithme en n pas au plus vers x*, et ce qui se passe si $x^* - x^1 \in \text{Vect}(d^1, d^2, ..., d^k)$.

**Quatrième partie : Un exemple particulier : la méthode du gradient conjugué.**

C'est une méthode où l'on prend $d^1 = - g^1$ et où l'on calcule ensuite itérativement les $d^k$ de la façon suivante :
Supposant $x^k$, $g^k$, $d^{k-1}$ connus (k > 1), on pose :

$$d^k = - g^k - \mu_k d^{k-1} \quad \text{où } \mu_k \text{ est un paramètre réel à déterminer.}$$

15) Déterminer la valeur de $\mu_k$ de telle sorte que $d^k$ soit A-conjugué de $d^{k-1}$.

16) Expliciter soigneusement, de façon directement utilisable pour quelqu'un désirant le programmer, l'algorithme correspondant ( on explicitera le premier pas et le pas courant permettant de passer de $x^k$ à $x^{k+1}$. *Aucun programme n'est demandé* ).

*Commentaires : En fait on peut montrer qu' alors tous les $d^k$ sont deux à deux A-conjugués (La démonstration n' est pas demandée ici). Cette méthode dite du gradient conjugué fournit donc x* en au plus n itérations. Elle est actuellement très utilisée lorsque A est de dimension élevée (n>100 par exemple) et comporte beaucoup d'éléments nuls.*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail